

2022 年高考数学真题完全解读（新高考全国 1 卷）

本资料分试卷使用地区、试卷总评、考点分布细目表、试题深度解读四个模块,其中试题深度解读模块又分为【命题意图】【答案】【解析】【点评】【知识链接】等栏目.本资料部分内容来源于网络

一、 试卷使用地区

山东、湖北、湖南、江苏、广东、福建、河北

二、 试卷总评

1.2022 年新高考数学 I 卷命题坚持思想性与科学性的统一,发挥数学应用广泛、联系实际的学科特点,设置真实情境,命制具有教育意义的试题,发挥教育功能和引导作用.如第 4 题以我国的重大建设成就“南水北调”工程为背景,考查学生的空间想象、运算求解能力,引导学生关注社会主义建设成果,增强社会责任感;

2. 该试卷依据课程标准命题,深化基础考查,突出主干知识,创新试题设计,加强教考衔接,发挥高考试题对中学教学改革的引导和促进作用.命题贯彻高考内容改革要求,依据高中课程标准,进一步增强考试与教学的衔接.试题的考查内容范围和比例、要求层次与课程标准保持一致,注重考查内容的全面性,同时突出主干、重点内容的考查,引导教学依标施教.试题突出对学科基本概念、基本原理的考查,强调知识之间的内在联系,引导学生形成学科知识系统;注重本原性方法,淡化特殊技巧,强调对通性通法的深入理解和综合运用,促进学生将知识和方法内化为自身的知识结构.如第 16 题体现特殊与一般的思想.

3.该试卷在选择题、填空题、解答题 3 种题型上都加强了对主干知识的考查.如第 12 题,要求学生在抽象函数的背景下,理解函数的奇偶性、对称性、导数等概念以及它们之间的联系,对数学抽象、直观想象、逻辑推理等核心素养都有较高的要求.

4.该试卷注重创新试题形式,引导教学注重培养核心素养和数学能力,增强试题开放性,鼓励学生运用创造性、发散性思维分析问题和解决问题,引导教学注重培育学生的创新精神,如第 14 题,要求写出一个方程,结果不唯一,思路不同,所用时间有较大差异,体现了试题的开放性与灵活性.在多选题的设计上,进一步增强选项的灵活性,突出对发散性思维和创新性思维的考查.在填空题的答案设计上,给学生较大的思考空间,对知识之间的联系、直观想象等素养作了深入的考查.

5.该试卷加强学科核心素养考查,强化数学思想方法的渗透,深入考查关键能力,优化试题设计,发挥数学科高考的选拔功能,助力提升学生综合素质.通过设置综合性的问题和较为复

杂的情境,加强关键能力的考查.如第 22 题重视基于数学素养的关键能力的考查,在数学知识、数学能力和创新思维层面都有所体现,具有较好的选拔功能.

三、考点分布细目表

题号	命题点	模块 (题目数)
1	集合的交集	1.集合 (共 1 题) 2.不等式 (共 3 题)
2	复数的概念与运算	复数 (共 1 题)
3	平面向量的线性运算	平面向量 (共 1 题)
4	实际问题中的空间几何体	立体几何 (共 4 题)
5	古典概型	排列组合、概率与统计 (共 3 题)
6	三角函数的图象与性质	三角函数与解三角形 (共 2 题)
7	比较大小	1. 函数与导数 (共 5 题) 2. 不等式 (共 3 题)
8	球与几何体的切接	立体几何 (共 4 题)
9	空间角	立体几何 (共 4 题)
10	用导数研究函数性质	函数与导数 (共 5 题)
11	抛物线	解析几何 (共 4 题)
12	函数与导数的综合	函数与导数 (共 5 题)
13	二项式定理	排列组合、概率与统计 (共 3 题)
14	圆与圆的位置关系	解析几何 (共 4 题)
15	用导数的几何意义研究曲线的切线	函数与导数 (共 5 题)
16	椭圆	解析几何 (共 4 题)
17	数列的通项、求和及数列不等式的证明	1. 数列 (共 1 题) 2. 不等式 (共 3 题)
18	解三角形	三角函数与解三角形 (共 2 题)
19	空间距离、二面角与空间向量	立体几何 (共 4 题)
20	独立性检验与条件概率	排列组合、概率与统计 (共 3 题)
21	双曲线	解析几何 (共 4 题)
22	导数的应用	函数与导数 (共 5 题)

四、试题深度解读

一、选择题: 本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 若集合 $M = \{x | \sqrt{x} < 4\}$, $N = \{x | 3x \geq 1\}$, 则 $M \cap N =$

- A. $\{x | 0 \leq x < 2\}$ B. $\left\{x \middle| \frac{1}{3} \leq x < 2\right\}$ C. $\{x | 3 \leq x < 16\}$ D.

$$\left\{x \middle| \frac{1}{3} \leq x < 16\right\}$$

【命题意图】本题考查简单不等式的解法及集合的交集运算,考查数学运算与数学抽象的核心素养.难度: 容易.

【答案】D

【解析】因为 $M = \{x | \sqrt{x} < 4\} = \{x | 0 \leq x < 16\}$, $N = \{x | x \geq \frac{1}{3}\}$, 故

$$M \cap N = \left\{x \middle| \frac{1}{3} \leq x < 16\right\}, \text{故选 D.}$$

【点评】集合是高考每年必考知识点,一般以容易题面目呈现,位于选择题的前3题的位置上,考查热点一是集合的并集、交集、补集运算,二是集合之间的关系所给集合,多为简单不等式的解集、离散的数集或点集,这种考查方式多年来保持稳定.

【知识链接】

1. 求解集合的运算问题的三个步骤:

(1) 看元素构成,集合是由元素组成的,从研究集合中元素的构成入手是解决集合运算问题的关键,即分清是数集、点集还是图形集等,如 $\{x | y = f(x)\}$, $\{y | y = f(x)\}$, $\{(x, y) | y = f(x)\}$ 三者是不同的.

(2) 对集合化简,有些集合是可以化简的,先化简再研究其关系并进行运算,可使问题简单明了、易于解决;

(3) 应用数形结合进行交、并、补等运算,常用的数形结合形式有数轴、坐标系和韦恩图(Venn).

2. 若 $i(1-z)=1$, 则 $z+\bar{z} =$

- A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

【命题意图】本题考查共轭复数及复数的运算,考查数学运算与数学抽象的核心素养.难度: 容易.

【答案】D

【解析】由 $i(1-z)=1$ 得 $1-z = \frac{1}{i} = -i$, 所以 $z=1+i$, 故 $z+\bar{z} = (1+i) + (1-i) = 2$, 故选 D

【点评】复数是高考每年必考知识点,一般以容易题面目呈现,位于选择题的前3题的位置上,考查热点一是复数的概念与复数的几何意义,如复数的模、共轭复数、纯虚数、复数的几何意义等,二是复数的加减乘除运算.

去年新高考卷第2题也是复数,考查的同样是共轭复数及复数除法的运算,这说明高考不回

避对重点知识的重复考查,另外为降低难度,今年把数据设置为最简单,可见虽然今年高考试题难度增大,新高考试卷入手依然比较容易.

【知识链接】

解复数运算问题的常见类型及解题策略

(1)复数的乘法.复数的乘法类似于多项式的四则运算,可将含有虚数单位 i 的看作一类同类项,不含 i 的看作另一类同类项,分别合并即可.

(2)复数的除法.除法的关键是分子分母同乘以分母的共轭复数,解题中要注意把 i 的幂写成最简形式.

(3)复数的运算与复数概念的综合题.先利用复数的运算法则化简,一般化为 $a+bi(a,b\in\mathbf{R})$ 的形式,再结合相关定义解答.

(4)复数的运算与复数几何意义的综合题.先利用复数的运算法则化简,一般化为 $a+bi(a,b\in\mathbf{R})$ 的形式,再结合复数的几何意义解答.

3. 在 $\triangle ABC$ 中,点 D 在边 AB 上, $BD=2DA$. 记 $\overrightarrow{CA}=\mathbf{m}, \overrightarrow{CD}=\mathbf{n}$, 则 $\overrightarrow{CB}=\quad$

A. $3\mathbf{m}-2\mathbf{n}$

B. $-2\mathbf{m}+3\mathbf{n}$

C. $3\mathbf{m}+2\mathbf{n}$

D.

$2\mathbf{m}+3\mathbf{n}$

【命题意图】本题考查平面向量的线性运算,考查逻辑推理与数学运算的核心素养.难度:容易.

【答案】B

【解析】解法一:因点 D 在边 AB 上,且 $BD=2DA$,所以 $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DA}$,即 $\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}=2(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CD})$,

所以 $\overrightarrow{CB}=3\overrightarrow{CD}-2\overrightarrow{CA}=3\mathbf{n}-2\mathbf{m}=-2\mathbf{m}+3\mathbf{n}$. 故选 B.

解法二:设 $\overrightarrow{CB}=\lambda\overrightarrow{CA}+\mu\overrightarrow{CD}=\lambda\mathbf{m}+\mu\mathbf{n}$,因为 A,D,B 共线,所以 $\lambda+\mu=1$,排除 C,D,结合图象及

三角形

法则,可得 $\lambda<0$,排除 A,故选 B.

【点评】向量是高考数学必考知识点,单独考查平面向量的题一般有一道,以客观题形式考查,考查热点是平面向量的线性运算及平面向量的数量积,可以是容易题,也可以是中等难度题,容易题一般单独考查平面向量知识,中等难度题常用平面几何、不等式等知识交汇考查.

【知识链接】

1.对于向量加法,三角形法则适用于任意两个非零向量求和,平行四边形法则只适用于两个不共线的向量求和.在使用三角形法则时要注意“首尾相连”,在使用平行四边形法则时需要注意两个向量的起点相同.

2.对于向量减法,若 $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}, \overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$, 则 $\overrightarrow{BA}=\mathbf{a}-\mathbf{b}$, 即 $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ 表示从向量 $\mathbf{b}$ 的终点指向向量 $\mathbf{a}$ (被减向量)的终点的向量

3.求已知向量的和.一般共起点的向量求和用平行四边形法则;求差用三角形法则;求首尾相连向量的和用三角形法则.求参数问题可以通过研究向量间的关系,通过向量的运算将向量表示出来,进行比较,求参数的值.

4.用平面向量基本定理解决问题的一般思路是先选择一组基底,并运用该基底将条件和结论表示成向量的形式,再通过向量的运算来解决.

4. 南水北调工程缓解了北方一些地区水资源短缺问题,其中一部分水蓄入某水库.已知该水库水位为海拔148.5m时,相应水面 面积为 140.0km^2 ; 水位为海拔157.5m时,相应水面的面积为 180.0km^2 ,将该水库在这两个水位间的形状看作一个棱台,则该水库水位从海拔148.5m 上升到157.5m时,增加的水量约为 ($\sqrt{7} \approx 2.65$)

- A. $1.0 \times 10^9 \text{m}^3$ B. $1.2 \times 10^9 \text{m}^3$ C. $1.4 \times 10^9 \text{m}^3$ D. $1.6 \times 10^9 \text{m}^3$

【命题意图】本题以实际问题为背景考查棱台体积的计算,考查直观想象与数学运算的核心素养.难度: 中等偏易

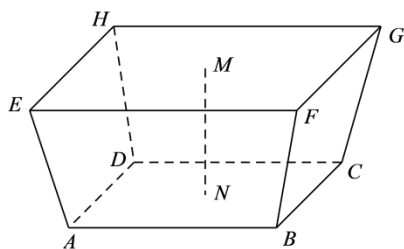
【答案】C

【解析】把增加的水量转化为棱台的体积,依题意可知棱台的高为 $MN = 157.5 - 148.5 = 9$ (m),

棱台上底面积 $S = 140.0\text{km}^2 = 140 \times 10^6 \text{m}^2$, 下底面积 $S' = 180.0\text{km}^2 = 180 \times 10^6 \text{m}^2$,

$$\begin{aligned} \therefore V &= \frac{1}{3}h(S + S' + \sqrt{SS'}) = \frac{1}{3} \times 9 \times (140 \times 10^6 + 180 \times 10^6 + \sqrt{140 \times 180 \times 10^{12}}) \\ &= 3 \times (320 + 60\sqrt{7}) \times 10^6 \approx (96 + 18 \times 2.65) \times 10^7 = 1.437 \times 10^9 \approx 1.4 \times 10^9 (\text{m}^3). \end{aligned}$$

故选 C.



【点评】立体几何在高考中一般有 2 道客观题 1 道解答题,客观题一般有一道是多面体,一道是旋转体或组合题; 今年由于增加了一道应用题,立体几何有 4 道,立体几何客观题考查热点是几何体中元素的位置关系与数量关系、几何体的表面积与体积、球与几何体的切接等.该题难度不大,运算错误是失分主要原因,这提醒我们在复习时要注重基础知识与运算能力的培养,基础题失分过多是考生高考数学考不好的主要原因.

【知识链接】

1.求解多面体的表面积,关键是找到其中的特征图形,如棱柱中的矩形,棱锥中的直角三角形,棱台中的直角梯形等,通过这些图形,找到几何元素间的关系,通过建立未知量与已知量间的

关系进行求解. 旋转体的表面积问题注意其侧面展开图的应用, 多面体的表面积是各个面的面积之和; 组合体的表面积注意衔接部分的处理.

2. 求简单几何体的体积一般直接利用公式, 求复杂几何体体积的常用方法为割补法和等积变换法: ①割补法: 将这个几何体分割成几个柱体、锥体, 分别求出柱体和锥体的体积, 从而得出要求的几何体的体积; ②等积变换法: 特别地, 对于三棱锥, 由于其任意一个面均可作为棱锥的底面, 从而可选择更容易计算的方式来求体积; 利用“等积性”还可求“点到面的距离”.

5. 从 2 至 8 的 7 个整数中随机取 2 个不同的数, 则这 2 个数互质的概率为

- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

【命题意图】本题考查古典概型概率的计算, 考查数学运算与逻辑推理的核心素养. 难度: 中等偏易.

【答案】D

【解析】从 2 至 8 的 7 个整数中随机取 2 个不同的数, 共有 $C_7^2 = 21$ 种不同的取法, 若两数不互质, 不同的取法有: $(2,4), (2,6), (2,8), (3,6), (4,6), (4,8), (6,8)$, 共 7 种, 故所求概率

$$P = \frac{21-7}{21} = \frac{2}{3}, \text{ 故选 D.}$$

【点评】古典概型概率的计算, 常作为客观题考查, 或出现在解答题求分布列中, 作为客观题考查的古典概型一般难度较低, 计数重复或遗漏是失分主要原因.

【知识链接】

1. 古典概型的概率计算的基本步骤:

①判断本次试验的结果是否是等可能的, 设出所求的事件为 A ;

②分别计算基本事件的总数 n 和所求的事件 A 所包含的基本事件个数 m ;

③利用古典概型的概率公式 $P(A) = \frac{m}{n}$, 求出事件 A 的概率.

2. 求古典概型的概率的关键是求试验的基本事件的总数和事件 A 包含的基本事件的个数, 这就需要正确列出基本事件, 在列举基本事件空间时, 可以利用列举、画树状图等方法, 以防遗漏. 同时要注意细节, 如用列举法, 注意是无序还是有序. 在解答时, 缺少必要的文字说明, 没有按要求列出基本事件是常见错误.

6. 记函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right) + b (\omega > 0)$ 的最小正周期为 T . 若 $\frac{2\pi}{3} < T < \pi$, 且 $y = f(x)$ 的

图象关于点 $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\right)$ 中心对称, 则 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) =$

- A. 1 B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{5}{2}$ D. 3

【命题意图】 本题考查三角函数的图象与性质,考查直观想象与逻辑推理的核心素养.难度:中等.

【答案】 A

【解析】 由 $f(x)$ 的最小正周期 T 满足 $\frac{2\pi}{3} < T < \pi$, 得 $\frac{2\pi}{3} < \frac{2\pi}{\omega} < \pi$, 解得 $2 < \omega < 3$, 由 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\right)$ 对称, 所以 $\frac{3\pi}{2}\omega + \frac{\pi}{4} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 且 $b = 2$, 所以 $\omega = -\frac{1}{6} + \frac{2}{3}k, k \in \mathbb{Z}$, 所以 $\omega = \frac{5}{2}$, $f(x) = \sin\left(\frac{5}{2}x + \frac{\pi}{4}\right) + 2$, 所以 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{5}{4}\pi + \frac{\pi}{4}\right) + 2 = 1$. 故选 A

【点评】 三角函数与解三角形在新高考全国卷中一般有 1 到 2 道客观题, 1 道解答题, 解答题一般考查解三角形, 客观题考查热点是三角变换及三角函数的图象与性质. 本题以正弦型函数为载体, 考查三角函数的图象与性质, 属于常规题型, 侧重对重要基础知识的考查. 三角函数对称性是三角函数的一个重要性质, 也是高考考查的热点.

【知识链接】

1. $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi) (A, \omega \neq 0)$, 则:

(1) $f(x)$ 为偶函数的充要条件是 $\varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$;

(2) $f(x)$ 为奇函数的充要条件是 $\varphi = k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

2. $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi) (A, \omega \neq 0)$ 的图象关于直线 $x = x_0$ 对称的充要条件是 $f(x_0) = \pm A$; 关于点 $(x_0, 0)$ 对称的充要条件是 $f(x_0) = 0$;

3. $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi) + B, \omega \neq 0$ 的图象关于直线 $x = x_0$ 对称的充要条件是 $f(x_0) = \pm A + B$; 关于点 (x_0, B) 对称的充要条件是 $f(x_0) = B$.

7. 设 $a = 0.1e^{0.1}, b = \frac{1}{9}, c = -\ln 0.9$, 则

A. $a < b < c$

B. $c < b < a$

C. $c < a < b$

D.

$a < c < b$

【命题意图】 本题考查数式大小的比较, 考查数学运算与逻辑推理的核心素养. 难度: 难

【答案】 C

【解析】 解法一: 设 $f(x) = \ln(1+x) - x (-1 < x \leq 0)$, 因为 $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x} > 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上单调递增, $f(-\frac{1}{10}) < f(0) = 0$, 即 $\ln \frac{9}{10} + \frac{1}{10} < 0$, 故 $\frac{9}{10} < e^{-\frac{1}{10}}$, 所以

$\frac{1}{10}e^{\frac{1}{10}} < \frac{1}{9}$, 故 $a < b$, 设 $g(x) = xe^x + \ln(1-x) (0 < x < \frac{1}{4})$, 则

$$g'(x) = (x+1)e^x + \frac{1}{x-1} = \frac{(x^2-1)e^x+1}{x-1}, \text{ 令 } h(x) = e^x(x^2-1)+1,$$

$h'(x) = e^x(x^2+2x-1) < 0$, 当 $0 < x < \frac{1}{4}$ 时 $h(x) = e^x(x^2-1)+1$ 单调递减, 又 $h(0) = 0$, 所以

当 $0 < x < \frac{1}{4}$ 时, $h(x) < 0$, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增, 所以 $g(0.1) > g(0) = 0$, 即

$0.1e^{0.1} > -\ln 0.9$, 所以 $a > c$, 故选 C.

解法二: 易得 $x \neq 0$ 时 $e^x > 1+x$, 所以 $x < 1$ 且 $x \neq 0$ 时 $e^{-x} > 1-x > 0$, 即 $e^x < \frac{1}{1-x}$, 所以

$1+0.1 < e^{0.1} < \frac{1}{1-0.1} < \frac{10}{9}$, 所以 $0.11 < a < b$, 设 $f(x) = \ln x - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) (x > 1)$, 则

$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = -\frac{(x-1)^2}{2x^2} < 0$, 所以 $f(x) < f(1) = 0$, 即 $\ln x < \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) (x > 1)$, 取

$x = \frac{10}{9}$, 得 $c = \ln \frac{10}{9} < \frac{1}{2}\left(\frac{10}{9} - \frac{9}{10}\right) = \frac{19}{180} < 0.11 < a$, 故选 C.

【点评】通过构造函数比较式子的大小, 是近几年高考的热点, 求解此类问题关键是观察式子的结构, 通过结构的特点构造相应的函数, 构造没有固定模式, 故成为高考的难点.

【知识链接】常见的导数不等式

(1) $e^x \geq x+1$; (2) $e^{x-1} \geq x$; (3) $\ln(x+1) \leq x$; (4) $\ln x \leq x-1$; (5) $\ln x \geq \frac{1}{x}-1$.

8. 已知正四棱锥的侧棱长为 l , 其各顶点都在同一球面上. 若该球的体积为 36π , 且

$3 \leq l \leq 3\sqrt{3}$, 则该正四棱锥体积的取值范围是

A. $\left[18, \frac{81}{4}\right]$

B. $\left[\frac{27}{4}, \frac{81}{4}\right]$

C. $\left[\frac{27}{4}, \frac{64}{3}\right]$

D.

$[18, 27]$

【命题意图】本题考查球与几何体的切接, 考查直观想象与逻辑推理的核心素养. 难度: 较难

【答案】C

【解析】 $\because$ 球的体积为 36π , 所以球的半径 $R=3$, 设正四棱锥的底面边长为 $2a$, 高为 h ,

则 $l^2 = 2a^2 + h^2$, $3^2 = 2a^2 + (h-3)^2$, 所以 $6h = l^2$, $2a^2 = l^2 - h^2$,

所以正四棱锥的体积 $V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \times 4a^2 \times h = \frac{2}{3} \times (l^2 - \frac{l^4}{36}) \times \frac{l^2}{6} = \frac{1}{9} \left(l^4 - \frac{l^6}{36} \right)$,

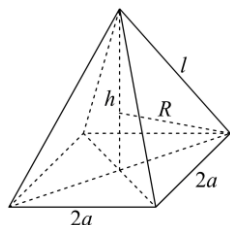
所以 $V' = \frac{1}{9} \left(4l^3 - \frac{l^5}{6} \right) = \frac{1}{9} l^3 \left(\frac{24-l^2}{6} \right)$,

当 $3 \leq l \leq 2\sqrt{6}$ 时, $V' > 0$, 当 $2\sqrt{6} < l \leq 3\sqrt{3}$ 时, $V' < 0$,

所以当 $l = 2\sqrt{6}$ 时,正四棱锥的体积 V 取最大值,最大值为 $\frac{64}{3}$,

又 $l = 3$ 时, $V = \frac{27}{4}$, $l = 3\sqrt{3}$ 时, $V = \frac{81}{4}$,所以正四棱锥的体积 V 的最小值为 $\frac{27}{4}$,

所以该正四棱锥体积的取值范围是 $\left[\frac{27}{4}, \frac{64}{3}\right]$. 故选 C.



【点评】球与几何体的切接是高考热点,常作为客观题压轴题出现,但由于同学们对这类问题训练比较大,对解题套路比较熟悉,所以该题难度小于第 7 题.

【知识链接】

1. 几何体的外接球问题关键是确定球心位置,主要方法有: ①将几何体还原或补为正方体或长方体,进而确定球心; ②几何体的外接球球心一定在过底面的外心与底面垂直的直线上; ③球心到各顶点的距离都相等; ④球心一定在外接球的直径上.

2. 求解几何体外接球的半径主要从两个方面考虑: 一是根据球的截面的性质,利用球的半径 R 、截面圆的半径 r 及球心到截面圆的距离 d 三者的关系 $R^2 = r^2 + d^2$ 求.

二、选择题: 本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

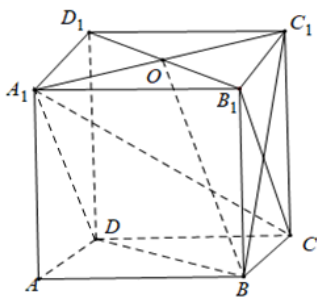
9. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$, 则

- A. 直线 BC_1 与 DA_1 所成的角为 90° B. 直线 BC_1 与 CA_1 所成的角为 90°
C. 直线 BC_1 与平面 BB_1D_1D 所成的角为 45° D. 直线 BC_1 与平面 $ABCD$ 所成的角为 45°

【命题意图】 本题考查空间中的线面位置关系及空间角,难度: 中等偏易.

【答案】 ABD

【解析】 如图,连接 B_1C 、 BC_1 , 因为 $DA_1 \parallel B_1C$, 所以直线 BC_1 与 B_1C 所成的角即为直线 BC_1 与 DA_1 所成的角, 因为四边形 BB_1C_1C 为正方形, 则 $B_1C \perp BC_1$, 故直线 BC_1 与 DA_1 所成的角为 90° , A 正确;



连接 A_1C , 因为 $A_1B_1 \perp$ 平面 BB_1C_1C , $BC_1 \subset$ 平面 BB_1C_1C , 则 $A_1B_1 \perp BC_1$,

因为 $B_1C \perp BC_1$, $A_1B_1 \cap B_1C = B_1$, 所以 $BC_1 \perp$ 平面 A_1B_1C ,

又 $A_1C \subset$ 平面 A_1B_1C , 所以 $BC_1 \perp CA_1$, 故 B 正确;

连接 A_1C_1 , 设 $A_1C_1 \cap B_1D_1 = O$, 连接 BO ,

因为 $BB_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, $C_1O \subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, 则 $C_1O \perp B_1B$,

因为 $C_1O \perp B_1D_1$, $B_1D_1 \cap B_1B = B_1$, 所以 $C_1O \perp$ 平面 BB_1D_1D ,

所以 $\angle C_1BO$ 为直线 BC_1 与平面 BB_1D_1D 所成的角,

设正方体棱长为 1, 则 $C_1O = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $BC_1 = \sqrt{2}$, $\sin \angle C_1BO = \frac{C_1O}{BC_1} = \frac{1}{2}$,

所以, 直线 BC_1 与平面 BB_1D_1D 所成的角为 30° , 故 C 错误;

因为 $C_1C \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 $\angle C_1BC$ 为直线 BC_1 与平面 $ABCD$ 所成的角, 易得

$\angle C_1BC = 45^\circ$, 故 D 正确. 故选 ABD.

【点评】对空间线面位置关系的考查, 是高考热点, 高考考查此类问题, 以正方体模型为载体的频率非常高, 故请同学们一定要重视.

【知识连接】

1. 判断(证明)线线垂直的方法

(1) 根据定义.

(2) 如果直线 $a \parallel b$, $a \perp c$, 则 $b \perp c$.

(3) 如果直线 $a \perp$ 面 α , $c \subset \alpha$, 则 $a \perp c$.

(4) 向量法: 两条直线的方向向量的数量积为零.

2. 线面角求法

根据线面角的定义, 作(找)出该角, 再解三角形求出该角, 步骤是作(找) $\Rightarrow$ 证 $\Rightarrow$ 求(算)三步曲.

10. 已知函数 $f(x) = x^3 - x + 1$, 则

A. $f(x)$ 有两个极值点

B. $f(x)$ 有三个零点

C. 点 $(0, 1)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的对称中心

D. 直线 $y = 2x$ 是曲线 $y = f(x)$ 的切线

【命题意图】本题考查导数在研究函数性质中的应用,考查逻辑推理的核心素养.难度:中等偏易.

【答案】AC

【解析】由 $f(x) = x^3 - x + 1$ 得 $f'(x) = 3x^2 - 1$, 令 $f'(x) > 0$ 得 $x > \frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$,

令 $f'(x) < 0$ 得 $-\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ 上单调递减, 在 $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3})$,

$(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ 是极值点, 故 A 正确;

因 $f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{9} > 0$, $f(\frac{\sqrt{3}}{3}) = 1 - \frac{2\sqrt{3}}{9} > 0$, $f(-2) = -5 < 0$,

所以, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3})$ 上有一个零点,

当 $x \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, $f(x) \geq f(\frac{\sqrt{3}}{3}) > 0$, 即函数 $f(x)$ 在 $(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$ 上无零点,

综上所述, 函数 $f(x)$ 有一个零点, 故 B 错误;

令 $h(x) = x^3 - x$, 则 $h(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -h(x)$,

则 $h(x)$ 是奇函数, $(0, 0)$ 是 $h(x)$ 的对称中心,

将 $h(x)$ 的图象向上移动一个单位得到 $f(x)$ 的图象,

所以点 $(0, 1)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的对称中心, 故 C 正确;

令 $f'(x) = 3x^2 - 1 = 2$, 可得 $x = \pm 1$, 又 $f(1) = f(-1) = 1$,

当切点为 $(1, 1)$ 时, 切线方程为 $y = 2x - 1$, 当切点为 $(-1, 1)$ 时, 切线方程为 $y = 2x + 3$,

故 D 错误 故选 AC.

【点评】本题以同学们熟悉的三次函数为载体, 综合考查导数在研究函数性质中的应用, 导数在往年的高考中一般有 1 道客观题, 1 道解答题, 今年的试卷有 5 道题涉及导数, 这虽然体现了导数的工具性, 但也确实有点反常, 估计明年涉及导数的题会有 3 道左右.

【知识连接】

1. 确定三次函数图象对称中心的方法:

所有的三次函数的图象都是中心对称图形, 确定其对称中心, 可看该函数图象由哪一个奇函数的图象平移得到, 也可根据下面的方法求: 设 $f'(x)$ 的导函数为 $f''(x)$, 方程 $f''(x) = 0$ 的根为 x_0 , 则 $(x_0, f(x_0))$ 就是 $f(x)$ 图象的对称中心.

2. 三次函数 $f(x)$ 有 3 个零点的充要条件是 $f'(x)=0$ 有 2 个不同实根 x_1, x_2 , 且

$$f(x_1)f(x_2) < 0.$$

11. 已知 O 为坐标原点, 点 $A(1, 1)$ 在抛物线 $C: x^2 = 2py (p > 0)$ 上, 过点 $B(0, -1)$ 的直线交 C 于 P, Q 两点, 则

A. C 的准线为 $y = -1$

B. 直线 AB 与 C 相切

C. $|OP| \cdot |OQ| > |OA|^2$

D. $|BP| \cdot |BQ| > |BA|^2$

【命题意图】本题考查抛物线的几何性质, 考查数学运算与逻辑推理的核心素养. 难度: 中等

【答案】BCD

【解析】将点 A 坐标代入 $x^2 = 2py (p > 0)$ 得 $1 = 2p$, 所以抛物线 C 的方程为 $x^2 = y$, 故准线方程为 $y = -\frac{1}{4}$, A 错误;

$$k_{AB} = \frac{1 - (-1)}{1 - 0} = 2, \text{ 所以直线 } AB \text{ 的方程为 } y = 2x - 1,$$

$$\text{联立 } \begin{cases} y = 2x - 1 \\ x^2 = y \end{cases}, \text{ 可得 } x^2 - 2x + 1 = 0, \text{ 解得 } x = 1, \text{ 故 B 正确;}$$

设过 B 的直线为 l , 若直线 l 与 y 轴重合, 则直线 l 与抛物线 C 只有一个交点,

所以, 直线 l 的斜率存在, 设其方程为 $y = kx - 1, P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$,

$$\text{联立 } \begin{cases} y = kx - 1 \\ x^2 = y \end{cases}, \text{ 得 } x^2 - kx + 1 = 0,$$

$$\text{所以 } \begin{cases} \Delta = k^2 - 4 > 0 \\ x_1 + x_2 = k \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases}, \text{ 所以 } k > 2 \text{ 或 } k < -2, y_1 y_2 = (x_1 x_2)^2 = 1,$$

$$\text{又 } |OP| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{y_1 + y_1^2}, |OQ| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = \sqrt{y_2 + y_2^2},$$

$$\text{所以 } |OP| \cdot |OQ| = \sqrt{y_1 y_2 (1 + y_1)(1 + y_2)} = \sqrt{kx_1 \times kx_2} = |k| > 2 = |OA|^2, \text{ 故 C 正确;}$$

$$\text{因为 } |BP| = \sqrt{1 + k^2} |x_1|, |BQ| = \sqrt{1 + k^2} |x_2|,$$

$$\text{所以 } |BP| \cdot |BQ| = (1 + k^2) |x_1 x_2| = 1 + k^2 > 5, \text{ 而 } |BA|^2 = 5, \text{ 故 D 正确.}$$

故选 BCD

【点评】解析几何在高考中一般有 3 到 4 道试题, 若有 3 道试题, 则这 3 道试题分别涉及椭圆、双曲线、抛物线; 若有 4 道试题, 则这 3 道试题分别涉及圆、椭圆、双曲线、抛物线.

【知识链接】

1. 客观题中的抛物线一般考查抛物线的几何性质及运算能力, 特别是求解有关线段长度时要

主要定义及方程思想及根与系数关系的应用.

2. 设 AB 是过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 焦点 F 的弦, 若 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则

① $x_1x_2=\frac{p^2}{4}, y_1y_2=-p^2$.

② 弦长 $|AB|=x_1+x_2+p=\frac{2p}{\sin^2\alpha}$ (α 为弦 AB 的倾斜角).

③ 以弦 AB 为直径的圆与准线相切.

④ 通径: 过焦点垂直于对称轴的弦, 长等于 $2p$, 通径是过焦点最短的弦.

12. 已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$, 记 $g(x)=f'(x)$, 若 $f\left(\frac{3}{2}-2x\right)$,

$g(2+x)$ 均为偶函数, 则

A. $f(0)=0$ B. $g\left(-\frac{1}{2}\right)=0$ C. $f(-1)=f(4)$ D.

$g(-1)=g(2)$

【命题意图】本题考查导数及函数的性质, 考查数学抽象与逻辑推理的核心素养. 难点: 难

【答案】BC

【解析】因为 $f\left(\frac{3}{2}-2x\right)$ 为偶函数, 所以 $f\left(\frac{3}{2}-2x\right)=f\left(\frac{3}{2}+2x\right)$, 令 $x=\frac{5}{4}$, 得

$f(-1)=f(4)$, C 正确;

由 $f\left(\frac{3}{2}-2x\right)=f\left(\frac{3}{2}+2x\right)$ 得 $f\left(\frac{3}{2}-x\right)=f\left(\frac{3}{2}+x\right)$, 所以 $f(3-x)=f(x)$, 两边求导得

$-g(3-x)=g(x)$, 令 $x=\frac{3}{2}$ 得 $g\left(\frac{3}{2}\right)=0$, 又 $g(2+x)$ 均为偶函数, 所以 $g(2+x)=g(2-x)$,

所以 $g(4-x)=g(x)=-g(3-x)$, 所以 $g(x+2)=-g(x+1)=g(x)$, 所以

$$g\left(-\frac{1}{2}\right)=g\left(\frac{3}{2}\right)=0,$$

构造函数 $f(x)=\sin \pi x+1$, 则 $g(x)=\pi \cos \pi x$, 则 $f(0)=0$ 不成立, $g(-1)=g(2)$ 不成立, A, D 错误, 故选 BC.

【点评】本题以抽象函数为载体, 考查函数的性质, 对逻辑思维能力要求较高, 注意否定一个命题可通过构造反例进行, 该题的模型是 $f(x)=A \sin (\omega x+\varphi)+B$.

【知识连接】

(1) 若 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称, 则 $f(a+x)=f(a-x)$ 或 $f(2a-x)=f(x)$

(2) 若 $f(x)$ 的图象关于点 (a, b) 对称, 则 $f(a+x)+f(a-x)=2b$ 或 $f(2a-x)+f(x)=2b$

(3)若函数 $f(x)$ 的图象既关于直线 $x=a$ 对称,又关于直线 $x=b$ 对称($a \neq b$),则 $f(x)$ 是周期函数,且 $2(b-a)$ 是它的一个周期.

(4)若函数 $f(x)$ 的图象既关于点 $(a,0)$ 对称,又关于点 $(b,0)$ 对称($a \neq b$),则 $f(x)$ 是周期函数,且 $2(b-a)$ 是它的一个周期.

(5)若函数 $f(x)$ 的图象既关于直线 $x=a$ 对称,又关于点 $(b,0)$ 对称($a \neq b$),则 $f(x)$ 是周期函数,且 $4(b-a)$ 是它的一个周期.

三、填空题: 本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. $\left(1-\frac{y}{x}\right)(x+y)^8$ 的展开式中 x^2y^6 的系数为_____ (用数字作答).

【命题意图】 本题考查二项式定理,考查数学运算的核心素养,难度: 容易

【答案】 -28

【解析】 因为 $\left(1-\frac{y}{x}\right)(x+y)^8 = (x+y)^8 - \frac{y}{x}(x+y)^8$,

所以 $\left(1-\frac{y}{x}\right)(x+y)^8$ 的展开式中含 x^2y^6 的项为 $C_8^6x^2y^6 - \frac{y}{x}C_8^5x^3y^5 = -28x^2y^6$,

$\left(1-\frac{y}{x}\right)(x+y)^8$ 的展开式中 x^2y^6 的系数为 -28

【点评】 二项式定理是高考常考问题,多为求 $(ax+b)^n$ 或 $(mx+n)(ax+b)^n$ 型展开式指定项系数,一般为送分题.

【知识连接】 求形如 $(a+b)^n(n \in \mathbb{N}^*)$ 的展开式中与特定项相关的量(常数项、参数值、特定项等)的步骤

第一步,利用二项式定理写出二项展开式的通项公式 $T_{r+1} = C_n^r a^{n-r} b^r$,常把字母和系数分离开来(注意符号不要出错);

第二步,根据题目中的相关条件(如常数项要求指数为零,有理项要求指数为整数)先列出相应方程(组)或不等式(组),解出 r ;

第三步,把 r 代入通项公式中,即可求出 T_{r+1} ,有时还需要先求 n ,再求 r ,才能求出 T_{r+1} 或者其他量.

14. 写出与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 和 $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 16$ 都相切的一条直线的方程_____.

【命题意图】 本题考查直线与圆,考查逻辑推理与数学运算的核心素养.难度: 中等偏易.

【答案】 $3x+4y-5=0$ 或 $7x-24y-25=0$ 或 $x=-1$

【解析】 圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的圆心为 $O(0,0)$,半径为 1,圆 $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 16$ 的圆心 O_1 为

(3,4), 半径为 4, 两圆圆心距为 $\sqrt{3^2+4^2}=5$, 等于两圆半径之和, 故两圆外切,

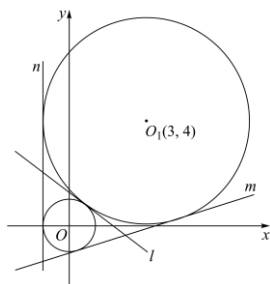
如图, 当切线为 l 时, 因为 $k_{OO_1} = \frac{4}{3}$, 所以 $k_l = -\frac{3}{4}$, 设方程为 $y = -\frac{3}{4}x + t (t > 0)$

O 到 l 的距离 $d = \frac{|t|}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}} = 1$, 解得 $t = \frac{5}{4}$, 所以 l 的方程为 $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$,

当切线为 m 时, 设直线方程为 $kx + y + p = 0$, 其中 $p > 0, k < 0$,

$$\text{由题意} \begin{cases} \frac{|p|}{\sqrt{1+k^2}} = 1 \\ \frac{|3k+4+p|}{\sqrt{1+k^2}} = 4 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} k = -\frac{7}{24} \\ p = \frac{25}{24} \end{cases}, y = \frac{7}{24}x - \frac{25}{24}$$

当切线为 n 时, 易知切线方程为 $x = -1$,



【点评】本题为开放性试题, 只需写出其中一个方程, 观察图象, 确定直线 $x = -1$ 是其中一条切线方程是最佳得分方案, 另外当两圆相切时直接把两圆方程相减, 也可以得出其中一条切线的方程, 该法也能迅速实现得分, 注意客观题在正确的前提条件下可以不择手段.

【知识链接】

1. 圆的切线方程常用结论

(1) 过圆 $x^2 + y^2 = r^2$ 上一点 $P(x_0, y_0)$ 的圆的切线方程为 $x_0x + y_0y = r^2$.

(2) 过圆 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 上一点 $P(x_0, y_0)$ 的圆的切线方程为 $(x_0-a)(x-a) + (y_0-b)(y-b) = r^2$.

(3) 过圆 $x^2 + y^2 = r^2$ 外一点 $M(x_0, y_0)$ 作圆的两条切线, 则两切点所在直线方程为 $x_0x + y_0y = r^2$.

2. 直线与圆综合问题的常见类型及解题策略

(1) 处理直线与圆的弦长问题时多用几何法, 即弦长的一半、弦心距、半径构成直角三角形.

(2) 圆的切线问题的处理要抓住圆心到直线的距离等于半径, 从而建立关系解决问题.

3. 两圆的位置关系与公切线的条数: ①内含: 0 条; ②内切: 1 条; ③相交: 2 条; ④外切: 3 条; ⑤外离: 4 条.

4. 当两圆相交时, 两圆方程 (x^2, y^2 项系数相同) 相减便可得公共弦所在直线的方程, 当两圆相切时, 两圆方程 (x^2, y^2 项系数相同) 相减便可得一条公切线方程.

15. 若曲线 $y = (x+a)e^x$ 有两条过坐标原点的切线, 则 a 的取值范围是_____.

【命题意图】本题考查导数的几何意义, 考查直观想象与逻辑推理的核心素养. 难度: 中等

【答案】 $(-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$

【解析】 $\because y = (x+a)e^x, \therefore y' = (x+1+a)e^x,$

设切点为 (x_0, y_0) , 则 $y_0 = (x_0+a)e^{x_0}$, 切线斜率 $k = (x_0+1+a)e^{x_0}$,

切线方程为: $y - (x_0+a)e^{x_0} = (x_0+1+a)e^{x_0}(x-x_0),$

$\because$ 切线过原点, $\therefore -(x_0+a)e^{x_0} = (x_0+1+a)e^{x_0}(-x_0),$

整理得: $x_0^2 + ax_0 - a = 0,$

$\because$ 切线有两条, $\therefore \Delta = a^2 + 4a > 0$, 解得 $a < -4$ 或 $a > 0$,

$\therefore a$ 的取值范围是 $(-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$

【点评】导数的几何意义是高考的一个高频考点, 考查热点主要有: 求曲线在某点处的切线; 求两条曲线的公切线; 确定满足条件的曲线的条数. 本题利用导数的几何意义研究确定的切线, 注意等价转化思想的应用: 切线有两条 $\rightarrow$ 切点 (x_0, y_0) 有 2 个 $\xrightarrow{\text{整理出关于 } x_0 \text{ 的方程}}$ 关于 x_0 的方程有 2 个不同实根.

【知识链接】求曲线切线的条数一般是设出切点 $(t, f(t))$, 由已知条件整理出关于 t 的方程, 把切线条数问题转化为关于 t 的方程的实根个数问题.

16. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, C 的上顶点为 A , 两个焦点为 F_1, F_2 , 离心率为 $\frac{1}{2}$. 过

F_1 且垂直于 AF_2 的直线与 C 交于 D, E 两点, $|DE| = 6$, 则 $\square ADE$ 的周长是_____.

【命题意图】本题考查椭圆定义、方程及几何性质, 考查数学运算与逻辑推理的核心素养. 难度: 难

【答案】13

【解析】 $\because$ 椭圆的离心率为 $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}, \therefore a = 2c, \therefore b^2 = a^2 - c^2 = 3c^2, \therefore C$ 的方程可化为

$\frac{x^2}{4c^2} + \frac{y^2}{3c^2} = 1$, 即 $3x^2 + 4y^2 - 12c^2 = 0$, 不妨设左焦点为 F_1 , 右焦点为 F_2 , 如图所示, $\because$

$AF_2 = a, OF_2 = c, a = 2c, \therefore \angle AF_2O = \frac{\pi}{3}, \therefore \triangle AF_1F_2$ 为正三角形, $\therefore$ 过 F_1 且垂直于 AF_2

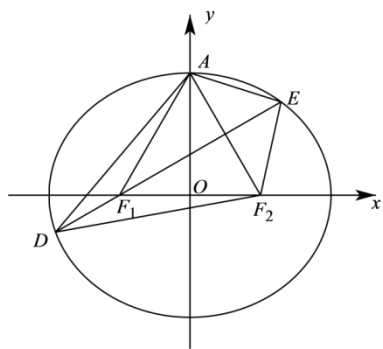
的直线与 C 交于 D, E 两点, DE 为线段 AF_2 的垂直平分线, 直线 DE 的方程: $x = \sqrt{3}y - c$, 代

入椭圆方程 $3x^2 + 4y^2 - 12c^2 = 0$, 整理化简得 $13y^2 - 6\sqrt{3}cy - 9c^2 = 0$,

$$\therefore |DE| = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} |y_1 - y_2| = 2 \times \frac{\sqrt{\Delta}}{13} = 2 \times 6 \times 4 \times \frac{c}{13} = 6,$$

$\therefore c = \frac{13}{8}$, 得 $a = 2c = \frac{13}{4}$, $\therefore DE$ 为线段 AF_2 的垂直平分线, 根据对称性,

$AD = DF_2$, $AE = EF_2$, $\therefore \square ADE$ 的周长等于 $\triangle F_2DE$ 的周长, 利用椭圆的定义得 $\triangle F_2DE$ 周长为 $4a = 13$.



【点评】本题把椭圆定义、方程与椭圆的几何性质结合在一起考查, 在知识交汇处命题, 综合性较强, 对运算能力及推理能力要求都比较高.

【知识链接】椭圆的定义具有双向作用, 即若 $|MF_1| + |MF_2| = 2a (2a > |F_1F_2|)$, 则点 M 的轨迹是椭圆; 反之, 椭圆上任意一点 M 到两焦点的距离之和必为 $2a$. 涉及椭圆上的点到焦点的距离问题时, 应先考虑是否能够利用椭圆的定义求解.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $a_1 = 1$, $\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$ 是公差为 $\frac{1}{3}$ 的等差数列.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 证明: $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} < 2$.

【命题意图】本题考查数列的通项与求和及数列不等式的证明, 考查数学运算与逻辑推理的核心素养. 难点: 中等偏易

【解析】(1) 解法一 $\because a_1 = 1, \therefore S_1 = a_1 = 1, \therefore \frac{S_1}{a_1} = 1$,

又 $\because \left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$ 是公差为 $\frac{1}{3}$ 的等差数列,

$$\therefore \frac{S_n}{a_n} = 1 + \frac{1}{3}(n-1) = \frac{n+2}{3}, \therefore S_n = \frac{(n+2)a_n}{3},$$

$$\therefore \text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } S_{n-1} = \frac{(n+1)a_{n-1}}{3},$$

$$\therefore a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{(n+2)a_n}{3} - \frac{(n+1)a_{n-1}}{3},$$

$$\text{整理得: } (n-1)a_n = (n+1)a_{n-1},$$

$$\text{即 } \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n+1}{n-1},$$

$$\begin{aligned} \therefore n \geq 2 \text{ 时 } a_n &= a_1 \times \frac{a_2}{a_1} \times \frac{a_3}{a_2} \times \dots \times \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \times \frac{a_n}{a_{n-1}} \\ &= 1 \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \dots \times \frac{n}{n-2} \times \frac{n+1}{n-1} = \frac{n(n+1)}{2}, \end{aligned}$$

显然对于 $n=1$ 也成立,

$$\therefore \{a_n\} \text{ 的通项公式 } a_n = \frac{n(n+1)}{2};$$

$$\text{解法二: } \because a_1 = 1, \therefore S_1 = a_1 = 1, \therefore \frac{S_1}{a_1} = 1,$$

又 $\because \left\{ \frac{S_n}{a_n} \right\}$ 是公差为 $\frac{1}{3}$ 的等差数列,

$$\therefore \frac{S_n}{a_n} = 1 + \frac{1}{3}(n-1) = \frac{n+2}{3}, \therefore S_n = \frac{(n+2)a_n}{3},$$

$$\therefore S_{n+1} = \frac{(n+1)a_{n+1}}{3},$$

$$\therefore a_{n+1} = S_{n+1} - S_n = \frac{(n+3)a_{n+1}}{3} - \frac{(n+2)a_n}{3},$$

$$\text{整理得 } na_{n+1} = (n+2)a_n, \text{ 所以 } n(n+1)a_{n+1} = (n+1)(n+2)a_n,$$

$$\text{即 } \frac{a_{n+1}}{(n+1)(n+2)} = \frac{a_n}{n(n+1)},$$

所以数列 $\left\{ \frac{a_n}{n(n+1)} \right\}$ 是常数数列, 所以 $\frac{a_n}{n(n+1)} = \frac{a_1}{1 \times 2} = \frac{1}{2},$

$$\therefore \{a_n\} \text{ 的通项公式 } a_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$(2) \quad \frac{1}{a_n} = \frac{2}{n(n+1)} = 2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right),$$

$$\therefore \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = 2 \left[\left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right] = 2 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) < 2.$$

【点评】数列的通项与求和是数列解答题的两大主题,基本每年都围绕这两大主题命题,其中求和常涉及的是公式求和、裂项求和及错误相减法求和.

【知识链接】裂项相消法

把数列的通项拆成两项之差求和,正负相消剩下首尾若干项. (1)用裂项相消法求和时,要对通项进行变换,如: $\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+k}} = \frac{1}{k}(\sqrt{n+k}-\sqrt{n})$, $\frac{1}{n(n+k)} = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}\right)$,裂项后可以产生连续相互抵消的项. (2)抵消后并不一定只剩下第一项和最后一项,也有可能前面剩两项,后面也剩两项.

18. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\frac{\cos A}{1+\sin A} = \frac{\sin 2B}{1+\cos 2B}$.

(1) 若 $C = \frac{2\pi}{3}$, 求 B ;

(2) 求 $\frac{a^2+b^2}{c^2}$ 的最小值.

【命题意图】本题考查三角变换与正弦定理,考查逻辑推理与数学运算的核心素养.难度;中等偏易

【解析】(1) 因为 $\frac{\cos A}{1+\sin A} = \frac{\sin 2B}{1+\cos 2B} = \frac{2\sin B \cos B}{2\cos^2 B} = \frac{\sin B}{\cos B}$,

即 $\sin B = \cos A \cos B - \sin A \sin B = \cos(A+B) = -\cos C = -\cos \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2}$,

而 $0 < B < \frac{\pi}{3}$, 所以 $B = \frac{\pi}{6}$;

(2) 由 (1) 知, $\sin B = -\cos C > 0$, 所以 $\frac{\pi}{2} < C < \pi$, $0 < B < \frac{\pi}{2}$,

而 $\sin B = -\cos C = \sin\left(C - \frac{\pi}{2}\right)$,

所以 $B = C - \frac{\pi}{2}$, $C = \frac{\pi}{2} + B$, $A = \pi - B - C = \frac{\pi}{2} - 2B$.

所以 $\frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{\sin^2 A + \sin^2 B}{\sin^2 C} = \frac{\cos^2 2B + 1 - \cos^2 B}{\cos^2 B}$

$= \frac{(2\cos^2 B - 1)^2 + 1 - \cos^2 B}{\cos^2 B} = 4\cos^2 B + \frac{2}{\cos^2 B} - 5 \geq 2\sqrt{8} - 5 = 4\sqrt{2} - 5$.

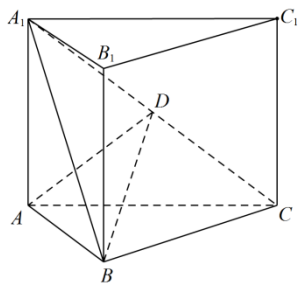
当且仅当 $\cos^2 B = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取等号, 所以 $\frac{a^2 + b^2}{c^2}$ 的最小值为 $4\sqrt{2} - 5$.

【知识链接】

1. 解三角形时, 如果式子中含有角的余弦或边的二次式, 要考虑用余弦定理; 如果式子中含有角的正弦或边的一次式时, 则考虑用正弦定理; 以上特征都不明显时, 则要考虑两个定理都有可能用到.

2. 求含有边角的某个式子的范围或最值, 通常把该式子用正弦定理及诱导公式转化为关于某个角的函数式, 再利用辅助角公式或不等式求范围或最值

19. 如图, 直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的体积为 4, $\square A_1BC$ 的面积为 $2\sqrt{2}$.



(1) 求 A 到平面 A_1BC 的距离;

(2) 设 D 为 A_1C 的中点, $AA_1 = AB$, 平面 $A_1BC \perp$ 平面 ABB_1A_1 , 求二面角 $A - BD - C$ 的正弦值.

【命题意图】 本题考查体积距离的计算及空间向量的应用, 考查数学运算及直观想象的核心素养. 难度: 中等

【解析】 (1) 因为三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的体积 $V = 4$,

$$\text{所以 } V_{A_1-ABC} = \frac{1}{3}V = \frac{4}{3},$$

在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 设点 A 到平面 A_1BC 的距离为 h ,

$$\text{由 } V_{A-A_1BC} = V_{A_1-ABC} \text{ 得 } \frac{1}{3}S_{\square A_1BC} \cdot h = \frac{2\sqrt{2}}{3}h = \frac{4}{3},$$

$$\text{所以 } h = \sqrt{2},$$

所以点 A 到平面 A_1BC 的距离为 $\sqrt{2}$;

(2) 如图, 取 A_1B 的中点 E , 连接 AE , 因为 $AA_1 = AB$, 所以 $AE \perp A_1B$,

又平面 $A_1BC \perp$ 平面 ABB_1A_1 , 平面 $A_1BC \cap$ 平面 $ABB_1A_1 = A_1B$,

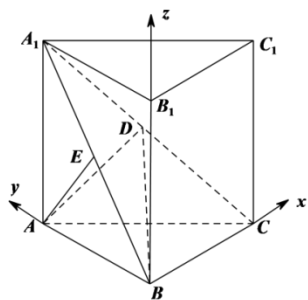
且 $AE \subset$ 平面 ABB_1A_1 , 所以 $AE \perp$ 平面 A_1BC ,

在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $BB_1 \perp$ 平面 ABC ,

由 $BC \subset \text{平面 } A_1BC$, $BC \subset \text{平面 } ABC$ 可得 $AE \perp BC$, $BB_1 \perp BC$,

又 $AE, BB_1 \subset \text{平面 } ABB_1A_1$ 且相交, 所以 $BC \perp \text{平面 } ABB_1A_1$,

所以 BC, BA, BB_1 两两垂直, 以 B 为原点, 直线 BC, BA, BB_1 分别为 x 轴, y 轴, z 轴, 建立空间直角坐标系,



由 (1) 得 $AE = \sqrt{2}$, 所以 $AA_1 = AB = 2$, $A_1B = 2\sqrt{2}$, 所以 $BC = 2$,

则 $A(0, 2, 0)$, $A_1(0, 2, 2)$, $B(0, 0, 0)$, $C(2, 0, 0)$, 所以 A_1C 的中点 $D(1, 1, 1)$,

则 $\overrightarrow{BD} = (1, 1, 1)$, $\overrightarrow{BA} = (0, 2, 0)$, $\overrightarrow{BC} = (2, 0, 0)$,

设平面 ABD 的一个法向量 $\mathbf{m} = (x_1, y_1, z_1)$, 则
$$\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{BD} = x_1 + y_1 + z_1 = 0 \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{BA} = 2y_1 = 0 \end{cases},$$

取 $x_1 = 1$, 得 $\mathbf{m} = (1, 0, -1)$,

设平面 BDC 的一个法向量 $\mathbf{n} = (x_2, y_2, z_2)$, 则
$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BD} = x_2 + y_2 + z_2 = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 2x_2 = 0 \end{cases}, \text{取 } y_2 = 1,$$

得 $\mathbf{n} = (0, 1, -1)$,

则 $\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| \cdot |\mathbf{n}|} = \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$,

所以二面角 $A-BD-C$ 的正弦值为 $\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

【点评】 立体几何解答题一般有 2 问, 第一问多为线面位置关系的证明或长度、面积、体积的计算, 第二问多为利用空间向量求线面角或二面角 (有时也可不利用空间向量), 在高考中立体几何解答题一般难度不大, 属于得分题, 利用空间向量求空间角, 运算错误是失分主要原因.

【知识链接】

1. 直线与平面所成角的求法

设直线 l 的方向向量为 $\mathbf{a}$, 平面 α 的法向量为 $\mathbf{n}$, 直线 l 与平面 α 所成的角为 θ , $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{n}$ 的夹角为

β , 则 $\sin \theta = |\cos \beta| = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{a}| |\mathbf{n}|}$. 利用空间向量求直线与平面所成的角, 可以有两种方法:

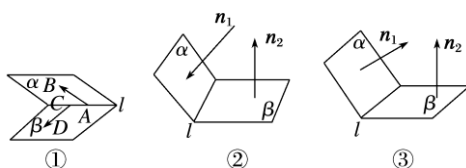
①通过平面的法向量来求,即求出斜线的方向向量与平面的法向量所夹的锐角,取其余角就是斜线和平面所成的角;

②分别求出斜线和它在平面内的射影的方向向量,再转化为求这两个方向向量的夹角(或其补角).

注意: 直线与平面所成角的取值范围是 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

求二面角的大小的方法

(1)如图①, AB,CD 分别是二面角 $\alpha-l-\beta$ 的两个面内与棱 l 垂直的直线,则二面角的大小 $\theta = \langle \vec{AB}, \vec{CD} \rangle$.



(2)如图②③, n_1, n_2 分别是二面角 $\alpha-l-\beta$ 的两个半平面 α, β 的法向量,则二面角的大小 θ 满足 $|\cos \theta| = |\cos \langle n_1, n_2 \rangle|$, 二面角的平面角大小是向量 n_1 与 n_2 的夹角(或其补角).

20. 一医疗团队为研究某地的一种地方性疾病与当地居民的卫生习惯(卫生习惯分为良好和不够良好两类)的关系,在已患该疾病的病例中随机调查了 100 例(称为病例组),同时在未患该疾病的人群中随机调查了 100 人(称为对照组),得到如下数据:

	不够良好	良好
病例组	40	60
对照组	10	90

(1) 能否有 99% 的把握认为患该疾病群体与未患该疾病群体的卫生习惯有差异?

(2) 从该地的人群中任选一人, A 表示事件“选到的人卫生习惯不够良好”, B 表示事件“选到的人患有该疾病”. $\frac{P(B|A)}{P(\bar{B}|A)}$ 与 $\frac{P(B|\bar{A})}{P(\bar{B}|\bar{A})}$ 的比值是卫生习惯不够良好对患该疾病风险程度的一项度量指标,记该指标为 R .

(i) 证明: $R = \frac{P(A|B)}{P(\bar{A}|B)} \cdot \frac{P(\bar{A}|\bar{B})}{P(A|\bar{B})}$;

(ii) 利用该调查数据,给出 $P(A|B), P(A|\bar{B})$ 的估计值,并利用(i)的结果给出 R 的估计值.

$$\text{附 } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)},$$

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
-----------------	-------	-------	-------

k	3.841	6.635	10.828
-----	-------	-------	--------

【命题意图】本题考查独立性检验与条件概率的应用,考查数学建模与数学运算的核心素养.

难度: 中等

【解析】(1)由题意知, $n=200$,

$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} = \frac{200(40 \times 90 - 60 \times 10)^2}{50 \times 150 \times 100 \times 100} = 24 > 6.635,$$

所以有 99% 的把握认为患该疾病群体与未患该疾病群体的卫生习惯有差异.

$$\begin{aligned} (2) \text{ (i) 证明: } R &= \frac{P(B|A) \cdot P(\bar{B}|\bar{A})}{P(\bar{B}|A) \cdot P(B|\bar{A})} = \frac{P(AB)}{P(A)} \cdot \frac{P(A)}{P(A\bar{B})} \cdot \frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{A})} \cdot \frac{P(\bar{A})}{P(\bar{A}B)}, \\ &= \frac{P(AB)}{P(B)} \cdot \frac{P(B)}{P(\bar{A}B)} \cdot \frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{B})} \cdot \frac{P(\bar{B})}{P(A\bar{B})} = \frac{P(A|B)}{P(\bar{A}|B)} \cdot \frac{P(\bar{A}|\bar{B})}{P(A|\bar{B})}, \end{aligned}$$

$$(ii) \text{ 由已知得 } P(A|B) = \frac{40}{100}, P(A|\bar{B}) = \frac{10}{100},$$

$$\text{又 } P(\bar{A}|B) = \frac{60}{100}, P(\bar{A}|\bar{B}) = \frac{90}{100},$$

$$\text{所以 } R = \frac{P(A|B)}{P(\bar{A}|B)} \cdot \frac{P(\bar{A}|\bar{B})}{P(A|\bar{B})} = 6$$

【点评】概率统计解答题注重知识的综合应用与实际应用,作为考查实践能力的重要载体,命题者要求考生会收集、整理、分析数据,能从大量数据中抽取对研究问题有用的信息,并作出判断,进而做到由样本数据估计总体特征.该类阅读量一般比较大,但难度多为中等,由于概率统计知识点比较多,高考每年考查的知识点不固定,频率分布直方图、折线图、分布列、期望与方差的应用、正态分布、回归分析、独立性检验都层出现在高考解答题中.

【知识链接】独立性检验的一般步骤

(1)假设两个分类变量 x 与 y 没有关系;

$$(2) \text{ 计算出 } K^2 \text{ 的观测值,其中 } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)};$$

(3)把 K^2 的值与临界值比较,作出合理的判断.

21. 已知点 $A(2,1)$ 在双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2-1} = 1 (a > 1)$ 上,直线 l 交 C 于 P, Q 两点,直线

AP, AQ 的斜率之和为 0.

(1) 求 l 的斜率;

(2) 若 $\tan \angle PAQ = 2\sqrt{2}$, 求 $\triangle PAQ$ 的面积.

【命题意图】本题考查直线与双曲线位置关系的应用,考查数学运算与逻辑推理的核心素养.

难度: 中点偏难

【解析】(1) 因为点 $A(2,1)$ 在双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2-1} = 1(a > 1)$ 上,

$$\text{所以 } \frac{4}{a^2} - \frac{1}{a^2-1} = 1, \text{ 解得 } a^2 = 2,$$

$$\text{所以双曲线 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{2} - y^2 = 1,$$

设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$, 易知直线 l 的斜率存在, 设 $l: y = kx + m$,

$$\text{由 } \begin{cases} y = kx + m \\ \frac{x^2}{2} - y^2 = 1 \end{cases} \text{ 得, } (1-2k^2)x^2 - 4mkx - 2m^2 - 2 = 0,$$

$$\text{所以, } x_1 + x_2 = -\frac{4mk}{2k^2-1}, x_1x_2 = \frac{2m^2+2}{2k^2-1},$$

$$\Delta = 16m^2k^2 + 4(2m^2+2)(2k^2-1) > 0 \Rightarrow m^2 - 1 + 2k^2 > 0.$$

$$\text{由 } k_{AP} + k_{BP} = 0 \text{ 得 } \frac{y_2-1}{x_2-2} + \frac{y_1-1}{x_1-2} = 0,$$

$$\text{即 } (x_1-2)(kx_2+m-1) + (x_2-2)(kx_1+m-1) = 0,$$

$$\text{即 } 2kx_1x_2 + (m-1-2k)(x_1+x_2) - 4(m-1) = 0,$$

$$\text{所以 } 2k \times \frac{2m^2+2}{2k^2-1} + (m-1-2k) \left(-\frac{4mk}{2k^2-1} \right) - 4(m-1) = 0,$$

$$\text{化简得, } 8k^2 + 4k - 4 + 4m(k+1) = 0, \text{ 即 } (k+1)(2k-1+m) = 0,$$

$$\text{所以 } k = -1 \text{ 或 } m = 1 - 2k,$$

当 $m = 1 - 2k$ 时, 直线 $l: y = kx + m = k(x-2) + 1$ 过点 $A(2,1)$, 与题意不符, 舍去,

故 $k = -1$.

(2) 不妨设直线 PA, PB 的倾斜角为 α, β $\left(\alpha < \frac{\pi}{2} < \beta \right)$, 因为 $k_{AP} + k_{BP} = 0$, 所以 $\alpha + \beta = \pi$,

$$\text{由 (1) 知, } x_1x_2 = 2m^2 + 2 > 0,$$

$$\text{当 } A, B \text{ 均在双曲线左支时, } \angle PAQ = 2\alpha, \text{ 所以 } \tan 2\alpha = 2\sqrt{2},$$

$$\text{即 } \sqrt{2} \tan^2 \alpha + \tan \alpha - \sqrt{2} = 0, \text{ 解得 } \tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (负值舍去)}$$

此时 PA 与双曲线的渐近线平行, 与双曲线左支无交点, 舍去;

当 A, B 均在双曲线右支时,

$$\text{因为 } \tan \angle PAQ = 2\sqrt{2}, \text{ 所以 } \tan(\beta - \alpha) = 2\sqrt{2}, \text{ 即 } \tan 2\alpha = -2\sqrt{2},$$

即 $\sqrt{2}\tan^2\alpha - \tan\alpha - \sqrt{2} = 0$, 解得 $\tan\alpha = \sqrt{2}$ (负值舍去),

于是, 直线 $PA: y = \sqrt{2}(x-2)+1$, 直线 $PB: y = -\sqrt{2}(x-2)+1$,

$$\text{联立} \begin{cases} y = \sqrt{2}(x-2)+1 \\ \frac{x^2}{2} - y^2 = 1 \end{cases} \quad \text{可得, } \frac{3}{2}x^2 + 2(1-2\sqrt{2})x + 10 - 4\sqrt{2} = 0,$$

因为方程有一个根为 2, 所以 $x_P = \frac{10-4\sqrt{2}}{3}, y_P = \frac{4\sqrt{2}-5}{3}$,

同理可得, $x_Q = \frac{10+4\sqrt{2}}{3}, y_Q = \frac{-4\sqrt{2}-5}{3}$.

所以 $PQ: x + y - \frac{5}{3} = 0, |PQ| = \frac{16}{3}$,

点 A 到直线 PQ 的距离 $d = \frac{\left|2+1-\frac{5}{3}\right|}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$,

故 $\triangle PAQ$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times \frac{16}{3} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{16\sqrt{2}}{9}$.

【点评】解析几何解答题前些年多以椭圆与抛物线为载体命题, 从去年开始出现了以双曲线为载体进行命题. 解析几何解答题一个突出特点是运算量比较大, 相等一部分学生会因运算不过关出错, 或嫌麻烦, 直接放弃, 其实解析几何解答题的数量还是比较容易想到的, 平时多做几道类似的题, 总结运算规律, 争取做到题不二错, 这部分分还是能够得到的.

【知识链接】

1. 设点 $P(m, n)$ 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上一定点, 点 A, B 是椭圆 C 上不同于 P

的两点, 若 $k_{PA} + k_{PB} = \lambda$, 则 $\lambda = 0$ 时直线 AB 斜率为定值 $\frac{bm^2}{an^2} (n \neq 0)$, 若 $\lambda \neq 0$, 则直线 AB

过定点 $\left(m - \frac{2n}{\lambda}, -n - \frac{2b^2m}{a^2\lambda}\right)$,

2. 设点 $P(m, n)$ 是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 上一定点, 点 A, B 是双曲线 C 上不同

于 P 的两点, 若 $k_{PA} + k_{PB} = \lambda$, 则 $\lambda = 0$ 时直线 AB 斜率为定值 $-\frac{bm^2}{an^2} (n \neq 0)$, 若 $\lambda \neq 0$, 则直

线 AB 过定点 $\left(m - \frac{2n}{\lambda}, -n + \frac{2b^2m}{a^2\lambda}\right)$;

3. 设点 $P(m, n)$ 是抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 一定点, 点 A, B 是抛物线 C 上不同于 P 的两

点, 若 $k_{PA} + k_{PB} = \lambda$, 则 $\lambda = 0$ 时直线 AB 斜率为定值 $-\frac{p}{n} (n \neq 0)$, 若 $\lambda \neq 0$, 则直线 AB 过定

点 $\left(m - \frac{2n}{\lambda}, -n + \frac{2p}{\lambda}\right)$;

4. 若点 P 在直线 $y = t$ 上, 证明直线 PA, PB 关于 $y = t$ 对称, 或证明直线 $y = t$ 平分 $\angle APB$, 可证明

$k_{PA} + k_{PB} = 0$.

22. 已知函数 $f(x) = e^x - ax$ 和 $g(x) = ax - \ln x$ 有相同的最小值.

(1) 求 a ;

(2) 证明: 存在直线 $y = b$, 其与两条曲线 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 共有三个不同的交点, 并且从左到右的三个交点的横坐标成等差数列.

【命题意图】本题考查导数在研究函数性质中的应用, 考查数学运算与逻辑推理的核心素养.

难点: 难

【解析】(1) $f(x) = e^x - ax$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且 $f'(x) = e^x - a$,

若 $a \leq 0$, 则 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, $f(x)$ 无最小值, 故 $a > 0$.

当 $x < \ln a$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x > \ln a$ 时, $f'(x) > 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 上为减函数, 在 $(\ln a, +\infty)$ 上为增函数,

故 $f(x)_{\min} = f(\ln a) = a - a \ln a$.

$g(x) = ax - \ln x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 且 $g'(x) = a - \frac{1}{x} = \frac{ax - 1}{x}$.

当 $0 < x < \frac{1}{a}$ 时, $g'(x) < 0$, 当 $x > \frac{1}{a}$ 时, $g'(x) > 0$,

$g(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ 上为减函数, 在 $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 上为增函数,

故 $g(x)_{\min} = g\left(\frac{1}{a}\right) = 1 - \ln \frac{1}{a}$.

因为 $f(x) = e^x - ax$ 和 $g(x) = ax - \ln x$ 有相同的最小值,

所以 $1 - \ln \frac{1}{a} = a - a \ln a$, 整理得到 $\frac{a-1}{1+a} = \ln a$, 其中 $a > 0$,

设 $g(a) = \frac{a-1}{1+a} - \ln a$, $a > 0$, 则 $g'(a) = \frac{2}{(1+a)^2} - \frac{1}{a} = \frac{-a^2 - 1}{a(1+a)^2} \leq 0$,

故 $g(a)$ 为 $(0, +\infty)$ 上的减函数, 而 $g(1) = 0$,

故 $g(a)=0$ 的唯一解为 $a=1$, 故 $\frac{1-a}{1+a}=\ln a$ 的解为 $a=1$. 综上, $a=1$.

(2) 由 (1) 可得 $f(x)=e^x-x$ 和 $g(x)=x-\ln x$ 的最小值为 1.

当 $b=1$, $x-\ln x=b$ 、 $e^x-x=b$ 各有一个实根, 不满足题意,

当 $b<1$ 时, $x-\ln x=b$ 、 $e^x-x=b$ 均无实根, 不满足题意

当 $b>1$ 时, 设 $S(x)=e^x-x-b$, 则 $S'(x)=e^x-1$,

当 $x<0$ 时, $S'(x)<0$, 当 $x>0$ 时, $S'(x)>0$,

故 $S(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上为减函数, 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数,

所以 $S(x)_{\min}=S(0)=1-b<0$,

而 $S(-b)=e^{-b}>0$, $S(b)=e^b-2b$,

设 $u(b)=e^b-2b$, 其中 $b>1$, 则 $u'(b)=e^b-2>0$,

故 $u(b)$ 在 $(1, +\infty)$ 上为增函数, 故 $u(b)>u(1)=e-2>0$,

故 $S(b)>0$, 故 $S(x)=e^x-x-b$ 有两个不同的零点, 即 $e^x-x=b$ 的根的个数为 2.

设 $T(x)=x-\ln x-b$, $T'(x)=\frac{x-1}{x}$,

当 $0<x<1$ 时, $T'(x)<0$, 当 $x>1$ 时, $T'(x)>0$,

故 $T(x)$ 在 $(0, 1)$ 上为减函数, 在 $(1, +\infty)$ 上为增函数,

所以 $T(x)_{\min}=T(1)=1-b<0$,

而 $T(e^{-b})=e^{-b}>0$, $T(e^b)=e^b-2b>0$,

$T(x)=x-\ln x-b$ 有两个不同的零点, 即 $x-\ln x=b$ 的根的个数为 2.

设 $h(x)=e^x+\ln x-2x$, 其中 $x>0$, 故 $h'(x)=e^x+\frac{1}{x}-2$,

设 $s(x)=e^x-x-1$, $x>0$, 则 $s'(x)=e^x-1>0$,

故 $s(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数, 故 $s(x)>s(0)=0$ 即 $e^x>x+1$,

所以 $h'(x)>x+\frac{1}{x}-1\geq 2-1>0$, 所以 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数,

而 $h(1)=e-2>0$, $h(\frac{1}{e^3})=e^{\frac{1}{e^3}}-3-\frac{2}{e^3}<e-3-\frac{2}{e^3}<0$,

故 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有且只有一个零点 x_0 , $\frac{1}{e^3} < x_0 < 1$,

且当 $0 < x < x_0$ 时, $h(x) < 0$ 即 $e^x - x < x - \ln x$ 即 $f(x) < g(x)$,

当 $x > x_0$ 时, $h(x) > 0$ 即 $e^x - x > x - \ln x$ 即 $f(x) > g(x)$,

因此若存在直线 $y = b$ 与曲线 $y = f(x)$ 、 $y = g(x)$ 有三个不同的交点,

故 $b = f(x_0) = g(x_0) > 1$,

此时 $e^x - x = b$ 有两个不同的零点 x_1, x_0 ($x_1 < 0 < x_0$),

此时 $x - \ln x = b$ 有两个不同的零点 x_0, x_4 ($0 < x_0 < 1 < x_4$),

故 $e^{x_1} - x_1 = b$, $e^{x_0} - x_0 = b$, $x_4 - \ln x_4 - b = 0$, $x_0 - \ln x_0 - b = 0$

所以 $x_4 - b = \ln x_4$ 即 $e^{x_4-b} = x_4$ 即 $e^{x_4-b} - (x_4 - b) - b = 0$,

故 $x_4 - b$ 为方程 $e^x - x = b$ 的解, 同理 $x_0 - b$ 也为方程 $e^x - x = b$ 的解

又 $e^{x_1} - x_1 = b$ 可化为 $e^{x_1} = x_1 + b$ 即 $x_1 - \ln(x_1 + b) = 0$ 即 $(x_1 + b) - \ln(x_1 + b) - b = 0$,

故 $x_1 + b$ 为方程 $x - \ln x = b$ 的解, 同理 $x_0 + b$ 也为方程 $x - \ln x = b$ 的解,

所以 $\{x_1, x_0\} = \{x_0 - b, x_4 - b\}$, 而 $b > 1$,

故 $\begin{cases} x_0 = x_4 - b \\ x_1 = x_0 - b \end{cases}$ 即 $x_1 + x_4 = 2x_0$.

【点评】 导数解答题一般为压轴题, 位于第 21 题或 22 题的位置上, 无论是求极值、最值或研究零点问题或证明不等式, 大多要利用导数研究函数的单调性, 然后利用单调性求解, 所以掌握研究函数单调性的方法至关重要.

【知识链接】

1. 用导数研究函数的零点, 一方面用导数判断函数的单调性, 借助零点存在性定理判断; 另一方面, 也可将零点问题转化为函数图象的交点问题, 利用数形结合来解决. 对于函数零点个数问题, 可利用函数的值域或最值, 结合函数的单调性、草图确定其中参数范围. 从图象的最高点、最低点, 分析函数的最值、极值; 从图象的对称性, 分析函数的奇偶性; 从图象的走向趋势, 分析函数的单调性、周期性等. 但需注意探求与论证之间区别, 论证是充要关系, 要充分利用零点存在定理及函数单调性严格说明函数零点个数.

2. 确定零点是否存在或函数有几个零点, 作为客观题常转化为图象交点问题, 作为解答题一般不提倡利用图象求解, 而是利用函数单调性及零点赋值理论. 函数赋值是近年高考的一个热点, 赋值之所以“热”, 是因为它涉及到函数领域的方方面面: 讨论函数零点的个数(包括零点的存在性, 唯一性); 求含参函数的极值或最值; 证明一类超越不等式; 求解某

些特殊的超越方程或超越不等式以及各种题型中的参数取值范围等,零点赋值基本模式是已知 $f(a)$ 的符号,探求赋值点 m (假定 $m < a$) 使得 $f(m)$ 与 $f(a)$ 异号,则在 (m,a) 上存在零点.赋值点遴选要领:遴选赋值点须做到三个确保:确保参数能取到它的一切值;确保赋值点 x_0 落在规定区间内;确保运算可行.

三个优先:(1) 优先常数赋值点;(2) 优先借助已有极值求赋值点;(3) 优先简单运算.